Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 72

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

18 de marzo de 2022

1. Calcular el conmutador $[a_k, a_q^\dagger]$

Sabemos que los operadores a_k y $a_k^\dagger$ están definidos en la ecuación (70.4) como

$$a_k = (f_k, \phi), \qquad a_k^\dagger = -(f_k^*, \phi) \tag{1}$$

con los productos definidos por la ecuación (69.2)

$$(f_k, \phi) = i \int (f_k^* \partial_t \phi - \phi \partial_t f_k^*) \mathrm{d}^3\vec{x}. \tag{2}$$

Usando esto, podemos reescribir el conmutador como

$$\begin{aligned}
[a_k, a_q^\dagger] &= \left[i \int (f_k^*(t,\vec{x}) \partial_t \phi(t,\vec{x}) - \phi(t,\vec{x}) \partial_t f_k^*(t,\vec{x})) \mathrm{d}^3\vec{x}, -i \int (f_q(t,\vec{y}) \partial_t \phi(t,\vec{y}) - \phi(t,\vec{y}) \partial_t f_q(t,\vec{y})) \mathrm{d}^3\vec{y} \right] \\
&= \int \Big\{ f_k^*(t,\vec{x}) f_q(t,\vec{y}) [\partial_t \phi(t,\vec{x}), \partial_t \phi(t,\vec{y})] - \partial_t f_k^*(t,\vec{x}) f_q(t,\vec{y}) [\phi(t,\vec{x}), \partial_t \phi(t,\vec{y})] \\
&\qquad - f_k^*(t,\vec{x}) \partial_t f_q(t,\vec{y}) [\partial_t \phi(t,\vec{x}), \phi(t,\vec{y})] + \partial_t f_k^*(t,\vec{x}) \partial_t f_q(t,\vec{y}) [\phi(t,\vec{x}), \phi(t,\vec{y})] \Big\} \mathrm{d}^3\vec{x} \mathrm{d}^3\vec{y}
\end{aligned} \tag{3}$$

por lo que nos queda todo en función de cuatro conmutadores fundamentales;

$$[\partial_t \phi(t,\vec{x}), \partial_t \phi(t,\vec{y})] = 0, \qquad [\phi(t,\vec{x}), \phi(t,\vec{y})] = 0,$$

$$[\phi(t,\vec{x}), \partial_t \phi(t,\vec{y})] = -[\partial_t \phi(t,\vec{x}), \phi(t,\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

Aplicando estos conmutadores podemos simplificar la ecuación (3) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
[a_k, a_q^\dagger] &= \int \Big\{ - i \partial_t f_k^*(t,\vec{x}) f_q(t,\vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) + i f_k^*(t,\vec{x}) \partial_t f_q(t,\vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \Big\} \mathrm{d}^3\vec{x} \mathrm{d}^3\vec{y} \\
&= i \int \Big\{ - \partial_t f_k^*(t,\vec{x}) f_q(t,\vec{x}) + f_k^*(t,\vec{x}) \partial_t f_q(t,\vec{x}) \Big\} \mathrm{d}^3\vec{x} = (f_k, f_q)
\end{aligned}$$

de forma que el conmutador de a y $a^\dagger$ se corresponde con el producto de las funciones f. Estos productos ya los conocemos, usando los resultados de la fórmula (70.3) podemos escribir

$$\boxed{[a_k, a_q^\dagger] = (f_k, f_q) = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q})} \tag{4}$$

De forma completamente análoga se demuestran los conmutadores

$$[a_k, a_q] = -(f_k, f_q^*) = 0, \qquad \left[a_k^\dagger, a_q^\dagger\right] = -(f_k^*, f_q) = 0 \tag{5}$$

2. Demostrar las fórmulas (72.2)

La primera ecuación que tenemos que demostrar es el producto

$$(f,g)^* = -(f^*,g^*) \tag{6}$$

Empecemos por el lado derecho, usando la definición (69.2)

$$\begin{aligned}-(f^*,g^*) &= -i\int (f\partial_t g^* - g^*\partial_t f)\mathrm{d}^3\vec{x} = -i\int (f^*\partial_t g - g\partial_t f^*)^*\mathrm{d}^3\vec{x} = -i\left(\int (f^*\partial_t g - g\partial_t f^*)\mathrm{d}^3\vec{x}\right)^* \\ &= \left(i\int (f^*\partial_t g - g\partial_t f^*)\mathrm{d}^3\vec{x}\right)^* = (f,g)^*\end{aligned}$$

La segunda ecuación que debemos demostrar es

$$(f,g) = -(g^*,f^*) \tag{7}$$

Pero, junto con la ecuación previa esto se puede escribir de forma completamente equivalente como

$$(f,g) = (g,f)^* \tag{8}$$

Para demostrar esta equivalencia solo tenemos que darnos cuenta que la primera ecuación, si intercambiamos f y g nos dice que

$$(g,f)^* = -(g^*,f^*)$$

Para demostrar esta ecuación de nuevo empezaremos por el lado derecho;

$$\begin{aligned}(g,f)^* &= \left(i\int (g\partial_t f^* - f^*\partial_t g)\mathrm{d}^3\vec{x}\right)^* = -i\int (g\partial_t f^* - f^*\partial_t g)^*\mathrm{d}^3\vec{x} = -i\int (g^*\partial_t f - f\partial_t g^*)\mathrm{d}^3\vec{x} \\ &= i\int (f^*\partial_t g - g\partial_t f^*)\mathrm{d}^3\vec{x} = (f,g)\end{aligned}$$

Demostrando así la segunda ecuación.